**Математический анализ**

**1. Непрерывность функции одной переменной, свойства непрерывных** **функций**

Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x₀, если выполняются следующие условия:

• Функция определена в точке x₀

• Существует предел функции при x→x₀

• Этот предел равен значению функции в точке x₀, т.е. lim(x→x₀) f(x) = f(x₀)

Формально непрерывность можно записать так: $$\lim\_{x \to x\_0} f(x) = f(x\_0)$$

Или через ε-δ определение: $$\forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0 : ; |x - x\_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x\_0)| < \varepsilon$$

**Свойства непрерывных функций:**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | Если функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x₀, то их сумма, разность, произведение и частное (если g(x₀)≠0) также непрерывны в этой точке. |
| 2. Композиция непрерывных функций непрерывна. | |
| 3. | **Теорема Вейерштрасса**: Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном интервале [a,b], достигает |

своего наибольшего и наименьшего значения на этом интервале.

**Теорема о промежуточном значении**: Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и f(a)≠f(b), то для любого числа C между f(a) и f(b) существует точка c∈[a,b], такая что f(c)=C.

Непрерывная функция переводит связное множество в связное множество.

**Пример задачи:**

Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

**Решение:** Функция не определена при x = 2, т.к. знаменатель обращается в ноль. Проверим, существует ли предел функции при x → 2.

$\lim\_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\_{x \to 2} (x+2) = 4$

Функция имеет предел при x → 2, но не определена в самой точке x = 2. Поэтому она не является непрерывной в этой точке. Это точка **устранимого разрыва**.

Функция непрерывна на множестве R{2}.

**2. Функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его** **геометрический смысл**

Функция нескольких переменных f(x₁, x₂, ..., xₙ) отображает точки n-мерного пространства в действительные числа.

**Частные производные**

Частная производная функции по переменной x — это производная функции по одной переменной при фиксированных остальных переменных: $$\frac{\partial f}{\partial x\_i} = \lim\_{h \to 0}\frac{f(x\_1,...,x\_i+h,...,x\_n) - f(x\_1,...,x\_i,...,x\_n)}{h}$$

**Полный дифференциал**

Полный дифференциал функции f(x₁, x₂, ..., xₙ) определяется как: $$df = \frac{\partial f}{\partial x\_1}dx\_1 + \frac{\partial f}{\partial x\_2}dx\_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x\_n}dx\_n$$

**Геометрический смысл полного дифференциала**

Для функции z = f(x,y) двух переменных полный дифференциал представляет приращение касательной плоскости к поверхности z = f(x,y) в точке (x₀,y₀,f(x₀,y₀)).

Уравнение касательной плоскости: $$z - f(x\_0,y\_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x\_0,y\_0)(x-x\_0) + \frac{\partial f} {\partial y}(x\_0,y\_0)(y-y\_0)$$

**Градиент**

Градиент функции f(x₁, x₂, ..., xₙ) — это вектор, компонентами которого являются частные производные функции: $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x\_1}, \frac{\partial f}{\partial x\_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x\_n}\right)$$

Градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции, а его модуль равен скорости роста функции в этом направлении.

**Достаточные условия дифференцируемости**

Функция f(x₁, x₂, ..., xₙ) дифференцируема в точке, если все её частные производные существуют и непрерывны в некоторой окрестности этой точки.

**Пример задачи:**

Найти полный дифференциал функции $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$ в точке (1,2).

**Решение:** Вычислим частные производные: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y$

В точке (1,2): $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$

Полный дифференциал: $df = 8 , dx - 1 , dy$

**3. Экстремум функций нескольких переменных; необходимые и** **достаточные условия**

Точка x₀ называется точкой **локального максимума** (минимума) функции f(x), если существует окрестность U(x₀) точки x₀ такая, что для всех x∈U(x₀) выполняется f(x)≤f(x₀) (или f(x)≥f(x₀)).

**Необходимые условия экстремума:**

Если функция f(x₁, x₂, ..., xₙ) имеет локальный экстремум в точке x₀, то все частные производные первого порядка в этой точке равны нулю или не существуют: $$\frac{\partial f}{\partial x\_i}(x\_0) = 0 \text{ для всех } i = 1, 2, ..., n$$

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума, называются **стационарными точками**.

**Достаточные условия экстремума для функции двух переменных:**

Пусть функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки (x₀,y₀). Обозначим: $$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\_0,y\_0)$$ $$B = \frac{\partial^2 f} {\partial x \partial y}(x\_0,y\_0)$$ $$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\_0,y\_0)$$ $$\Delta = AC - B^2$$

Тогда:

1. Если Δ > 0 и A < 0, то в точке (x₀,y₀) функция имеет локальный максимум.

2. Если Δ > 0 и A > 0, то в точке (x₀,y₀) функция имеет локальный минимум.

3. Если Δ < 0, то в точке (x₀,y₀) экстремума нет (седловая точка).

4. Если Δ = 0, то требуется дополнительное исследование.

**Для функций большего числа переменных:**

Используется критерий Сильвестра на основе главных миноров матрицы Гессе: $$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x\_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\_1 \partial x\_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x\_1 \partial x\_n} \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\_2 \partial x\_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x\_2 \partial x\_n} \ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\_n \partial x\_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\_n \partial x\_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x\_n^2} \end{pmatrix}$$

**Пример задачи:**

Исследовать на экстремум функцию $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 6x - 10y$.

**Решение:** Найдем частные производные первого порядка и приравняем их к нулю: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y - 6 = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4x - 10 = 0$

Решим систему уравнений: $2x + 4y = 6$ $4x + 2y = 10$

Умножим первое уравнение на 2: $4x + 8y = 12$ $4x + 2y = 10$

Вычтем второе уравнение из первого: $6y = 2$ $y = \frac{1}{3}$

Подставим в первое уравнение: $2x + 4 \cdot \frac{1}{3} = 6$ $2x = 6 - \frac{4}{3} = \frac{18-4}{3} = \frac{14} {3}$ $x = \frac{7}{3}$

Получаем стационарную точку $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$.

Найдем частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

Для точки $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$: $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$ $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 4^2 = 4 - 16 = -12 < 0$

Поскольку Δ < 0, в точке $(\frac{7}{3}, \frac{1}{3})$ экстремума нет, это седловая точка.

**4. Числовые ряды, виды сходимости. Достаточные признаки** **сходимости. Свойства абсолютно сходящихся рядов**

Числовой ряд — это выражение вида $\sum\_{n=1}^{\infty} a\_n = a\_1 + a\_2 + ... + a\_n + ...$, где $a\_n$ — числа.

**Основные понятия:**

• **Частичная сумма ряда**: $S\_n = a\_1 + a\_2 + ... + a\_n$

Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: $ \lim\_{n \to \infty} S\_n = S$. Число S называется суммой ряда.

Ряд называется **расходящимся**, если предел последовательности его частичных сумм не существует или бесконечен.

**Виды сходимости:**

1. **Абсолютная сходимость**: ряд $\sum |a\_n|$ сходится

2. **Условная сходимость**: ряд $\sum a\_n$ сходится, но ряд $\sum |a\_n|$ расходится

**Достаточные признаки сходимости:**

1. **Необходимый признак сходимости**: если ряд $\sum a\_n$ сходится, то $\lim\_{n \to \infty} a\_n = 0$

2. **Признак сравнения**: если $0 \leq a\_n \leq b\_n$ и ряд $\sum b\_n$ сходится, то ряд $\sum a\_n$ тоже сходится

|  |  |
| --- | --- |
| 3. | **Признак Даламбера**: если для ряда $\sum a\_n$ с положительными членами $\lim\_{n \to \infty} \frac{a\_{n |
|  | +1}}{a\_n} = L$, то: |

при L < 1 ряд сходится

при L > 1 ряд расходится

при L = 1 требуется дополнительное исследование

**Признак Коши**: если для ряда $\sum a\_n$ с положительными членами $\lim\_{n \to \infty} \sqrt[n]{a\_n} = L $, то:

при L < 1 ряд сходится

при L > 1 ряд расходится

при L = 1 требуется дополнительное исследование

**Интегральный признак Коши**: если f(x) — непрерывная, положительная, невозрастающая функция на [1,∞) и $a\_n = f(n)$, то ряд $\sum a\_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл $\int\_1^\infty f(x)dx$

**Свойства абсолютно сходящихся рядов:**

1. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится и обычным образом

2. Сумма и произведение абсолютно сходящихся рядов абсолютно сходятся

|  |  |
| --- | --- |
| 3. | Члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять в произвольном порядке, и сумма ряда не изменится |

**Пример задачи:**

Исследовать сходимость ряда $\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

**Решение:** Применим признак Даламбера: $a\_n = \frac{n}{3^n}$ $a\_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$\lim\_{n \to \infty} \frac{a\_{n+1}}{a\_n} = \lim\_{n \to \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \lim\_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n} = \lim\_{n \to \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то по признаку Даламбера ряд абсолютно сходится.

**5. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.**

**Свойства равномерно сходящихся рядов**

Функциональный ряд — это выражение вида $\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x) = f\_1(x) + f\_2(x) + ... + f\_n(x) + ...$, где $f\_n(x)$ — функции, определенные на некотором множестве D.

**Основные понятия:**

|  |  |
| --- | --- |
| • | Для каждого фиксированного x∈D получаем числовой ряд. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд сходится в точке x. |

• **Область сходимости ряда** - множество всех точек, в которых ряд сходится.

• **Сумма функционального ряда** - функция S(x), значение которой в каждой точке x из области сходимости

равно сумме соответствующего числового ряда: $S(x) = \sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)$

**Равномерная сходимость:**

Функциональный ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)$ \*\*равномерно сходится\*\* на множестве D к функции S(x), если $\forall \varepsilon > 0 , \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N , \forall x \in D ; |S\_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ где $S\_n(x) = \sum\_{k=1}^{n} f\_k(x)$ - частичная сумма ряда.

Другими словами, ряд сходится равномерно, если остаток ряда можно сделать сколь угодно малым одновременно для всех x из D, выбрав достаточно большой номер n.

**Признак Вейерштрасса:**

Если на множестве D существуют такие числа $M\_n \geq 0$, что $|f\_n(x)| \leq M\_n$ для всех $x \in D$ и ряд $ \sum\_{n=1}^{\infty} M\_n$ сходится, то функциональный ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на D.

**Свойства равномерно сходящихся рядов:**

**Непрерывность суммы**: Если функции $f\_n(x)$ непрерывны на D и ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)$ равномерно сходится на D, то сумма ряда S(x) также непрерывна на D.

**Интегрирование**: Если функции $f\_n(x)$ непрерывны на [a,b], и ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)$ равномерно сходится на [a,b], то $\int\_a^b S(x)dx = \int\_a^b \sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)dx = \sum\_{n=1} ^{\infty} \int\_a^b f\_n(x)dx$

**Дифференцирование**: Если функции $f\_n(x)$ имеют непрерывные производные на (a,b) и ряд $ \sum\_{n=1}^{\infty} f\_n'(x)$ равномерно сходится на (a,b), а ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке интервала (a,b), то ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x)$ равномерно сходится на (a,b) и $ \frac{d}{dx}S(x) = \frac{d}{dx}\sum\_{n=1}^{\infty} f\_n(x) = \sum\_{n=1}^{\infty} f\_n'(x)$

**Пример задачи:**

Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ на множестве $D = [0, + \infty)$.

**Решение:** Применим признак Вейерштрасса. Для $x \in [0, +\infty)$ найдем максимум функции $f\_n(x) = \frac{x} {n^2+x^2}$:

$f\_n'(x) = \frac{n^2+x^2-x \cdot 2x}{(n^2+x^2)^2} = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$

Приравняем производную к нулю: $n^2-x^2 = 0$ $x = n$

Проверим, что это точка максимума: $f\_n''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}\right) = \frac{-2x(n^2+x^2)^2 - (n^2-x^2)2(n^2+x^2)2x}{(n^2+x^2)^4}$

При $x = n$: $f\_n''(n) < 0$, значит это точка максимума.

$f\_n(n) = \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$

Таким образом, $|f\_n(x)| \leq \frac{1}{2n}$ для всех $x \in [0, +\infty)$.

Рассмотрим ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, умноженный на $\frac{1}{2}$, который расходится.

Поскольку мажорирующий ряд расходится, признак Вейерштрасса неприменим.

Необходимо проверить равномерную сходимость другими методами, например, с помощью критерия Коши равномерной сходимости. Но это выходит за рамки текущего анализа.

**6. Степенные ряды. Свойства степенных рядов. Разложение** **элементарных функций**

Степенной ряд — это функциональный ряд вида: $\sum\_{n=0}^{\infty} a\_n(x-x\_0)^n = a\_0 + a\_1(x-x\_0) + a\_2(x- x\_0)^2 + ...$ где $a\_n$ — числа (коэффициенты ряда), $x\_0$ — фиксированное число (центр ряда).

**Радиус и интервал сходимости:**

Для степенного ряда существует число R ≥ 0 (радиус сходимости), такое что:

• Ряд абсолютно сходится при |x-x₀| < R

• Ряд расходится при |x-x₀| > R

• В точках |x-x₀| = R требуется дополнительное исследование

Радиус сходимости можно найти по формуле: $R = \frac{1}{\limsup\_{n \to \infty}\sqrt[n]{|a\_n|}} = \lim\_{n \to \infty}\left|\frac{a\_n}{a\_{n+1}}\right|$ если предел существует.

Интервал сходимости: $(x\_0-R, x\_0+R)$

**Свойства степенных рядов:**

1. Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке $[x\_0-r, x\_0+r]$, где $0 < r < R$.

2. Сумма степенного ряда S(x) является непрерывной функцией на интервале сходимости.

3. Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать в пределах интервала сходимости.

◦ Дифференцирование: $S'(x) = \sum\_{n=1}^{\infty} na\_n(x-x\_0)^{n-1}$

◦ Интегрирование: $\int S(x)dx = C + \sum\_{n=0}^{\infty} \frac{a\_n}{n+1}(x-x\_0)^{n+1}$

|  |  |
| --- | --- |
| 4. | Радиус сходимости ряда, полученного дифференцированием или интегрированием, равен радиусу сходимости исходного ряда. |

**Разложение элементарных функций в ряд Тейлора:**

Функцию f(x), имеющую производные всех порядков в окрестности точки x₀, можно представить в виде ряда Тейлора: $f(x) = \sum\_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x\_0)}{n!}(x-x\_0)^n$

Наиболее часто используемые разложения (в окрестности x₀ = 0, ряды Маклорена):

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum\_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $R = \infty$ |

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum\_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum\_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum\_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $R = 1$

$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... = \sum\_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n}x^n$, $R = 1$

**Пример задачи:**

Найти радиус сходимости и исследовать сходимость на границе интервала сходимости степенного ряда $ \sum\_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}(x+2)^n$

**Решение:** Для определения радиуса сходимости используем формулу с отношением коэффициентов:

$a\_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n}$ $a\_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$

$R = \lim\_{n \to \infty}\left|\frac{a\_n}{a\_{n+1}}\right| = \lim\_{n \to \infty}\frac{\frac{|(-1)^n|}{n \cdot 3^n}}{\frac{| (-1)^{n+1}|}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}} = \lim\_{n \to \infty}\frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{n \cdot 3^n} = \lim\_{n \to \infty}3 \cdot \frac{n+1}{n} = 3 \cdot 1 = 3$

Интервал сходимости: $|x+2| < 3$ или $-5 < x < 1$

Проверим сходимость на границах: При $x = -5$ имеем $|x+2| = |-5+2| = 3$, получаем ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot 3^n = \sum\_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Это знакочередующийся гармонический ряд, который сходится по признаку Лейбница.

При $x = 1$ имеем $|x+2| = |1+2| = 3$, получаем ряд $\sum\_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} \cdot 3^n = \sum\_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Это тот же знакочередующийся гармонический ряд, который сходится.

Таким образом, область сходимости ряда: $-5 \leq x \leq 1$.

**7. Определенный интеграл, интегрируемость непрерывной функции.**

**Определение кратного интеграла**

**Определенный интеграл**

Определенный интеграл функции f(x) на отрезке [a,b] определяется как предел интегральных сумм: $\int\_a^b f(x)dx = \lim\_{n \to \infty} \sum\_{i=1}^{n} f(\xi\_i) \Delta x\_i$ где $\Delta x\_i = x\_i - x\_{i-1}$, $a = x\_0 < x\_1 < ...

< x\_n = b$ — разбиение отрезка [a,b], $\xi\_i \in [x\_{i-1}, x\_i]$.

Функция f(x) называется **интегрируемой** на отрезке [a,b], если этот предел существует.

**Интегрируемость непрерывной функции**

**Теорема:** Всякая непрерывная на отрезке [a,b] функция является интегрируемой на этом отрезке.

Более общий случай: **Теорема (Интегрируемость по Риману):** Функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b] тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке и множество точек разрыва функции имеет меру нуль.

**Свойства определенного интеграла:**

1. Линейность: $\int\_a^b (Af(x) + Bg(x))dx = A\int\_a^b f(x)dx + B\int\_a^b g(x)dx$

2. Аддитивность: $\int\_a^c f(x)dx + \int\_c^b f(x)dx = \int\_a^b f(x)dx$ для любого $c \in [a,b]$

3. Интеграл от неотрицательной функции неотрицателен: если $f(x) \geq 0$ на [a,b], то $\int\_a^b f(x)dx \geq 0$ 4. Если $f(x) \leq g(x)$ на [a,b], то $\int\_a^b f(x)dx \leq \int\_a^b g(x)dx$

5. $\left|\int\_a^b f(x)dx\right| \leq \int\_a^b |f(x)|dx$

**Кратный интеграл**

Двойной интеграл функции f(x,y) по области D определяется как: $\iint\_D f(x,y)dxdy = \lim\_{n \to \infty} \sum\_{i=1}^{n} f(\xi\_i, \eta\_i) \Delta S\_i$ где область D разбивается на n малых частей с площадями $\Delta S\_i$, а точки $(\xi\_i, \eta\_i)$ выбираются внутри этих частей.

Для вычисления двойного интеграла часто используют повторные интегралы: $\iint\_D f(x,y)dxdy = \int\_a^b \left( \int\_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx$ где область D задана неравенствами $a \leq x \leq b$, $c(x) \leq y \leq d(x)$.

Аналогично определяются тройные и многомерные интегралы.

**Пример задачи:**

Вычислить двойной интеграл $\iint\_D xy dxdy$, где D - прямоугольник $[0,1] \times [0,2]$.

**Решение:** Используем повторный интеграл:

$\iint\_D xy dxdy = \int\_0^1 \left( \int\_0^2 xy dy \right) dx = \int\_0^1 \left. \left( \frac{xy^2}{2} \right) \right|\_{y=0} ^{y=2} dx = \int\_0^1 \left( \frac{x \cdot 4}{2} - \frac{x \cdot 0}{2} \right) dx = \int\_0^1 2x dx = \left. x^2 \right|\_0^1 = 1 - 0 = 1$

**8. Интеграл Коши. Ряды Тейлора и Лорана**

**Интеграл Коши**

В теории функций комплексного переменного интеграл Коши для функции f(z), аналитической внутри и на простом замкнутом контуре C, имеет вид: $f(z\_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\_C \frac{f(z)}{z-z\_0} dz$ где z₀ — точка внутри контура C.

Формула Коши для n-й производной: $f^{(n)}(z\_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint\_C \frac{f(z)}{(z-z\_0)^{n+1}} dz$

**Ряд Тейлора**

Аналитическую функцию f(z) в окрестности точки z₀ можно представить в виде ряда Тейлора: $f(z) = \sum\_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z\_0)}{n!} (z-z\_0)^n$

Используя формулу Коши для производных, получаем: $f(z) = \sum\_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \oint\_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z\_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z\_0)^n$

Ряд Тейлора сходится в круге |z-z₀| < R, где R — расстояние от точки z₀ до ближайшей особой точки функции f(z).

**Ряд Лорана**

Если функция f(z) аналитична в кольцевой области r < |z-z₀| < R, то её можно представить в виде ряда Лорана: $f(z) = \sum\_{n=-\infty}^{\infty} a\_n (z-z\_0)^n = \sum\_{n=0}^{\infty} a\_n (z-z\_0)^n + \sum\_{n=1}^{\infty} a\_{-n} (z-z\_0)^{-n}$

Коэффициенты ряда Лорана определяются формулой: $a\_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\_C \frac{f(z)}{(z-z\_0)^{n+1}} dz $ где C — любой замкнутый контур внутри кольца r < |z-z₀| < R, обходящий точку z₀ в положительном направлении.

**Классификация особых точек:**

1. **Устранимая особая точка:** Если a₋₁ = a₋₂ = ... = 0, т.е. в разложении Лорана отсутствуют отрицательные

|  |  |
| --- | --- |
|  | степени. |
| 2. | **Полюс порядка m:** Если a₋ₘ ≠ 0, но a₋(ₘ₊₁) = a₋(ₘ₊₂) = ... = 0, т.е. имеется конечное число отрицательных степеней. |
| 3. **Существенно особая точка:** Если имеется бесконечное число членов с отрицательными степенями. | |

**Пример задачи:**

Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана в окрестности точки z = 0.

**Решение:** Представим функцию в виде суммы простейших дробей: $f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}$

Приводя к общему знаменателю: $\frac{A(z-1) + Bz}{z(z-1)} = \frac{1}{z(z-1)}$

Отсюда: $A(z-1) + Bz = 1$ Подставим z = 0: $-A = 1$, откуда $A = -1$ Подставим z = 1: $B = 1$

Таким образом: $f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1}$

Для разложения в ряд Лорана в окрестности z = 0 первое слагаемое уже в нужной форме, а второе преобразуем: $ \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum\_{n=0}^{\infty} z^n = -1 - z - z^2 - z^3 - ...$ при |z| < 1.

Итоговое разложение: $f(z) = \frac{-1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - ... = \frac{-1}{z} - \sum\_{n=0}^{\infty} z^n$

Это разложение справедливо в кольце 0 < |z| < 1.

**9. Линейные непрерывные функционалы. Линейные операторы**

**Линейные функционалы**

Линейный функционал — это отображение f из линейного пространства X в поле скаляров K (обычно R или C), удовлетворяющее условию линейности: $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ для всех векторов x, y из X и всех скаляров α, β из K.

Линейный функционал называется **непрерывным** в точке x₀, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0, что из ||x - x₀|| < δ следует |f(x) - f(x₀)| < ε.

Для линейного функционала непрерывность в какой-либо точке эквивалентна непрерывности во всех точках пространства.

**Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности):** Линейный функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такая константа M > 0, что |f(x)| ≤ M||x|| для всех x из X.

Норма линейного функционала определяется как: $||f|| = \sup\_{||x||=1} |f(x)| = \sup\_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{||x||}$

**Линейные операторы**

Линейный оператор — это отображение A из линейного пространства X в линейное пространство Y, удовлетворяющее условию линейности: $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ для всех векторов x, y из X и всех скаляров α, β.

Линейный оператор называется **непрерывным** в точке x₀, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0, что из || x - x₀|| < δ следует ||A(x) - A(x₀)|| < ε.

Для линейного оператора непрерывность в какой-либо точке эквивалентна непрерывности во всех точках пространства.

**Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности):** Линейный оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такая константа M > 0, что ||A(x)|| ≤ M||x|| для всех x из X.

Норма линейного оператора определяется как: $||A|| = \sup\_{||x||=1} ||A(x)|| = \sup\_{x \neq 0} \frac{||A(x)||}{||x||}$

**Сопряженный оператор**

Пусть A: X → Y — линейный оператор между гильбертовыми пространствами. Сопряженный оператор A\*: Y → X определяется соотношением: $(Ax, y)\_Y = (x, A^\*y)\_X$ для всех x из X и y из Y.

**Самосопряженный оператор**

Линейный оператор A: X → X в гильбертовом пространстве называется самосопряженным (или эрмитовым), если A = A\*, т.е. $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех x, y из X.

**Пример задачи:**

Проверить, является ли линейный функционал f(x) = x₁ + 2x₂ - 3x₃ на пространстве R³ со стандартной евклидовой нормой непрерывным, и найти его норму.

**Решение:** Покажем, что функционал ограничен: $|f(x)| = |x\_1 + 2x\_2 - 3x\_3| \leq |x\_1| + 2|x\_2| + 3|x\_3| \leq \sqrt{x\_1^2 + x\_2^2 + x\_3^2} + 2\sqrt{x\_1^2 + x\_2^2 + x\_3^2} + 3\sqrt{x\_1^2 + x\_2^2 + x\_3^2} = 6||x||$

Таким образом, |f(x)| ≤ 6||x||, следовательно, функционал ограничен и, значит, непрерывен.

Найдем точную норму функционала: $||f|| = \sup\_{||x||=1} |f(x)| = \sup\_{||x||=1} |x\_1 + 2x\_2 - 3x\_3|$

По неравенству Коши-Буняковского: $|x\_1 + 2x\_2 - 3x\_3| \leq \sqrt{x\_1^2 + x\_2^2 + x\_3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = ||x|| \cdot \sqrt{14} = \sqrt{14}$

Причем равенство достигается, когда вектор x пропорционален вектору (1, 2, -3), т.е. при $x = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, -3)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{14}}(1 + 4 + 9) = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$

Следовательно, ||f|| = √14 ≈ 3.74.