**Математический анализ**

**1. Непрерывность функции одной переменной, свойства непрерывных функций**

Функция f(x) называется **непрерывной** в точке x₀, если выполняются следующие условия: - Функция определена в точке x₀ - Существует предел функции при x→x₀ - Этот предел равен значению функции в точке x₀, т.е. lim(x→x₀) f(x) = f(x₀)

Формально непрерывность можно записать так:

Или через ε-δ определение:

Свойства непрерывных функций:

Если функции f(x) и g(x) непрерывны в точке x₀, то их сумма, разность, произведение и частное (если g(x₀)≠0) также непрерывны в этой точке.

Композиция непрерывных функций непрерывна.

**Теорема Вейерштрасса**: Функция, непрерывная на замкнутом ограниченном интервале [a,b], достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом интервале.

**Теорема о промежуточном значении**: Если функция f(x) непрерывна на [a,b] и f(a)≠f(b), то для любого числа C между f(a) и f(b) существует точка c∈[a,b], такая что f(c)=C.

Непрерывная функция переводит связное множество в связное множество.

**2. Функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его геометрический смысл**

**Функция нескольких переменных** f(x₁, x₂, …, xₙ) отображает точки n-мерного пространства в действительные числа.

Частные производные

Частная производная функции по переменной xᵢ — это производная функции по одной переменной при фиксированных остальных переменных:

Полный дифференциал

Полный дифференциал функции f(x₁, x₂, …, xₙ) определяется как:

Геометрический смысл полного дифференциала

Для функции z = f(x,y) двух переменных полный дифференциал представляет приращение касательной плоскости к поверхности z = f(x,y) в точке (x₀,y₀,f(x₀,y₀)).

Уравнение касательной плоскости:

Градиент

Градиент функции f(x₁, x₂, …, xₙ) — это вектор, компонентами которого являются частные производные функции:

Градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции, а его модуль равен скорости роста функции в этом направлении.

Достаточные условия дифференцируемости

Функция f(x₁, x₂, …, xₙ) дифференцируема в точке, если все её частные производные существуют и непрерывны в некоторой окрестности этой точки.

**3. Экстремум функций нескольких переменных; необходимые и достаточные условия**

Точка x₀ называется точкой **локального максимума** (минимума) функции f(x), если существует окрестность U(x₀) точки x₀ такая, что для всех x∈U(x₀) выполняется f(x)≤f(x₀) (или f(x)≥f(x₀)).

Необходимые условия экстремума:

Если функция f(x₁, x₂, …, xₙ) имеет локальный экстремум в точке x₀, то все частные производные первого порядка в этой точке равны нулю или не существуют:

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума, называются **стационарными точками**.

Достаточные условия экстремума для функции двух переменных:

Пусть функция f(x,y) имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности стационарной точки (x₀,y₀). Обозначим:

Тогда: 1. Если Δ > 0 и A < 0, то в точке (x₀,y₀) функция имеет локальный максимум. 2. Если Δ > 0 и A > 0, то в точке (x₀,y₀) функция имеет локальный минимум. 3. Если Δ < 0, то в точке (x₀,y₀) экстремума нет (седловая точка). 4. Если Δ = 0, то требуется дополнительное исследование.

Для функций большего числа переменных:

Используется критерий Сильвестра на основе главных миноров матрицы Гессе:

**4. Числовые ряды, виды сходимости. Достаточные признаки сходимости. Свойства абсолютно сходящихся рядов**

**Числовой ряд** — это выражение вида , где — числа.

Основные понятия:

**Частичная сумма ряда**:

Ряд называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм имеет конечный предел: . Число S называется суммой ряда.

Ряд называется **расходящимся**, если предел последовательности его частичных сумм не существует или бесконечен.

Виды сходимости:

**Абсолютная сходимость**: ряд сходится

**Условная сходимость**: ряд сходится, но ряд расходится

Достаточные признаки сходимости:

**Необходимый признак сходимости**: если ряд сходится, то

**Признак сравнения**: если и ряд сходится, то ряд тоже сходится

**Признак Даламбера**: если для ряда с положительными членами , то:

при L < 1 ряд сходится

при L > 1 ряд расходится

при L = 1 требуется дополнительное исследование

**Признак Коши**: если для ряда с положительными членами , то:

при L < 1 ряд сходится

при L > 1 ряд расходится

при L = 1 требуется дополнительное исследование

**Интегральный признак Коши**: если f(x) — непрерывная, положительная, невозрастающая функция на [1,∞) и , то ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

Свойства абсолютно сходящихся рядов:

Если ряд сходится абсолютно, то он сходится и обычным образом

Сумма и произведение абсолютно сходящихся рядов абсолютно сходятся

Члены абсолютно сходящегося ряда можно переставлять в произвольном порядке, и сумма ряда не изменится

**5. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов**

**Функциональный ряд** — это выражение вида , где — функции, определенные на некотором множестве D.

Основные понятия:

Для каждого фиксированного x∈D получаем числовой ряд. Если этот числовой ряд сходится, то говорят, что функциональный ряд сходится в точке x.

**Область сходимости ряда** - множество всех точек, в которых ряд сходится.

**Сумма функционального ряда** - функция S(x), значение которой в каждой точке x из области сходимости равно сумме соответствующего числового ряда:

Равномерная сходимость:

Функциональный ряд **равномерно сходится** на множестве D к функции S(x), если где - частичная сумма ряда.

Другими словами, ряд сходится равномерно, если остаток ряда можно сделать сколь угодно малым одновременно для всех x из D, выбрав достаточно большой номер n.

Признак Вейерштрасса:

Если на множестве D существуют такие числа , что для всех и ряд сходится, то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на D.

Свойства равномерно сходящихся рядов:

**Непрерывность суммы**: Если функции непрерывны на D и ряд равномерно сходится на D, то сумма ряда S(x) также непрерывна на D.

**Интегрирование**: Если функции непрерывны на [a,b], и ряд равномерно сходится на [a,b], то

**Дифференцирование**: Если функции имеют непрерывные производные на (a,b) и ряд равномерно сходится на (a,b), а ряд сходится хотя бы в одной точке интервала (a,b), то ряд равномерно сходится на (a,b) и

6. Степенные ряды. Свойства степенных рядов. Разложение элементарных функций

Степенной ряд — это функциональный ряд вида: где — числа (коэффициенты ряда), — фиксированное число (центр ряда).

Радиус и интервал сходимости:

Для степенного ряда существует число R ≥ 0 (радиус сходимости), такое что: - Ряд абсолютно сходится при |x-x₀| < R - Ряд расходится при |x-x₀| > R - В точках |x-x₀| = R требуется дополнительное исследование

Радиус сходимости можно найти по формуле: если предел существует.

Интервал сходимости:

Свойства степенных рядов:

Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке , где .

Сумма степенного ряда S(x) является непрерывной функцией на интервале сходимости.

Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать в пределах интервала сходимости.

Дифференцирование:

Интегрирование:

Радиус сходимости ряда, полученного дифференцированием или интегрированием, равен радиусу сходимости исходного ряда.

Разложение элементарных функций в ряд Тейлора:

Функцию f(x), имеющую производные всех порядков в окрестности точки x₀, можно представить в виде ряда Тейлора:

Наиболее часто используемые разложения (в окрестности x₀ = 0, ряды Маклорена):

,

,

,

,

,

**7. Определенный интеграл, интегрируемость непрерывной функции. Определение кратного интеграла**

**Определенный интеграл** функции f(x) на отрезке [a,b] определяется как предел интегральных сумм: где , — разбиение отрезка [a,b], .

Функция f(x) называется **интегрируемой** на отрезке [a,b], если этот предел существует.

Интегрируемость непрерывной функции

**Теорема:** Всякая непрерывная на отрезке [a,b] функция является интегрируемой на этом отрезке.

Более общий случай: **Теорема (Интегрируемость по Риману):** Функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b] тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке и множество точек разрыва функции имеет меру нуль.

Свойства определенного интеграла:

Линейность:

Аддитивность: для любого

Интеграл от неотрицательной функции неотрицателен: если на [a,b], то

Если на [a,b], то

Кратный интеграл

Двойной интеграл функции f(x,y) по области D определяется как: где область D разбивается на n малых частей с площадями , а точки выбираются внутри этих частей.

Для вычисления двойного интеграла часто используют повторные интегралы: где область D задана неравенствами , .

Аналогично определяются тройные и многомерные интегралы.

**8. Интеграл Коши. Ряды Тейлора и Лорана**

В теории функций комплексного переменного **интеграл Коши** для функции f(z), аналитической внутри и на простом замкнутом контуре C, имеет вид: где z₀ — точка внутри контура C.

Формула Коши для n-й производной:

Ряд Тейлора

Аналитическую функцию f(z) в окрестности точки z₀ можно представить в виде **ряда Тейлора**:

Используя формулу Коши для производных, получаем:

Ряд Тейлора сходится в круге |z-z₀| < R, где R — расстояние от точки z₀ до ближайшей особой точки функции f(z).

Если функция f(z) аналитична в кольцевой области r < |z-z₀| < R, то её можно представить в виде **ряда Лорана**:

Коэффициенты ряда Лорана определяются формулой: где C — любой замкнутый контур внутри кольца r < |z-z₀| < R, обходящий точку z₀ в положительном направлении.

Классификация особых точек:

**Устранимая особая точка:** Если a₋₁ = a₋₂ = … = 0, т.е. в разложении Лорана отсутствуют отрицательные степени.

**Полюс порядка m:** Если a₋ₘ ≠ 0, но a₋(ₘ₊₁) = a₋(ₘ₊₂) = … = 0, т.е. имеется конечное число отрицательных степеней.

**Существенно особая точка:** Если имеется бесконечное число членов с отрицательными степенями.

9. Линейные непрерывные функционалы. Линейные операторы

Линейные функционалы

Линейный функционал — это отображение f из линейного пространства X в поле скаляров K (обычно R или C), удовлетворяющее условию линейности: для всех векторов x, y из X и всех скаляров α, β из K.

Линейный функционал называется **непрерывным** в точке x₀, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0, что из ||x - x₀|| < δ следует |f(x) - f(x₀)| < ε.

Для линейного функционала непрерывность в какой-либо точке эквивалентна непрерывности во всех точках пространства.

**Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности):** Линейный функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такая константа M > 0, что |f(x)| ≤ M||x|| для всех x из X.

Норма линейного функционала определяется как:

Линейные операторы

Линейный оператор — это отображение A из линейного пространства X в линейное пространство Y, удовлетворяющее условию линейности: для всех векторов x, y из X и всех скаляров α, β.

Линейный оператор называется **непрерывным** в точке x₀, если для любого ε > 0 существует такое δ > 0, что из ||x - x₀|| < δ следует ||A(x) - A(x₀)|| < ε.

Для линейного оператора непрерывность в какой-либо точке эквивалентна непрерывности во всех точках пространства.

**Теорема (необходимое и достаточное условие непрерывности):** Линейный оператор A непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. существует такая константа M > 0, что ||A(x)|| ≤ M||x|| для всех x из X.

Норма линейного оператора определяется как:

Сопряженный оператор

Пусть A: X → Y — линейный оператор между гильбертовыми пространствами. Сопряженный оператор A\*: Y → X определяется соотношением: для всех x из X и y из Y.

Самосопряженный оператор

Линейный оператор A: X → X в гильбертовом пространстве называется самосопряженным (или эрмитовым), если A = A\*, т.е. для всех x, y из X.